

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю. Б. Лифшиц

*Центральный аэрогидродинамический институт  
им. проф. Н. Е. Жуковского, г. Жуковский Моск. обл.*

**Аннотация.** Как показывают данные экспериментальных исследований, стационарное обтекание крылового профиля трансзвуковым потоком становится неустойчивым в некотором диапазоне чисел Маха и углов атаки. Возникающее нестационарное течение характеризуется колебательным движением скачков уплотнения и сопровождается периодически возникающим и исчезающим отрывом пограничного слоя. Роль пограничного слоя и области невязкого потока в возникновении и поддержке таких нестационарных течений исследована очень мало. В работе делается попытка описать механизм передачи возмущений в невязкой области за скачком уплотнения, который, при некоторых условиях, позволяет дать оценку границы устойчивости течений около профиля.

**Введение.** Дозвуковое безотрывное течение газа около профиля под углом атаки является стационарным. При увеличении числа Маха на бесконечности течение становится трансзвуковым, и скачок уплотнения в местной сверхзвуковой зоне быстро движется к задней кромке, причем его интенсивность увеличивается. При некотором числе Маха скачок уплотнения становится достаточно сильным, чтобы вызвать отрыв пограничного слоя. Дальнейшее увеличение числа Маха делает течение нестационарным [1]. Начало отрыва, вызванного взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем, связывается с различными явлениями аэроупругой неустойчивости [2], которые в разных случаях называются флаттером с одной степенью свободы, флаттером с ограниченной амплитудой, колебаниями предельного цикла, бассом элерона и бафтингом. Неустойчивость характеризуется возрастанием амплитуды до некоторой величины, которая варьируется от уровня слабых помех до уровня, достаточного для разрушения конструкции.

Трансзвуковой отрыв может также привести к появлению самовозбужденных колебаний или бафтинга скачка уплотнения

и на жестких телах, что было подтверждено в экспериментах с профилями [3–5], где наблюдалось периодическое движение скачка, сопровождаемое периодически возникающим и исчезающим отрывом пограничного слоя. Генерируемые при этом нестационарные нагрузки являются весьма большими, однако они существуют в узком диапазоне трансзвуковых чисел Маха и углов атаки и имеют частоту, близкую к той, что наблюдается при флаттере. Верхняя граница этих осцилляций соответствует параметрам потока, при которых скачок расположен около задней кромки профиля.

В расчетных исследованиях некоторые свойства бафтинга скачка на 18%-ом симметричном профиле из дуг окружности были получены численным интегрированием полных уравнений Навье-Стокса [6] в приближении тонкого слоя [7] и в приближении теории вязко-невязкого взаимодействия [8]. Результаты показывают чувствительность решения к типу модели турбулентности и важность отрыва пограничного слоя для возникновения осцилляций. Хотя детали рассматриваемого явления зависят от этих факторов, все расчеты дают близкие значения числа Маха, при котором осцилляции возникают. Аналогичные результаты были получены и для более употребительных профилей [9–11]. Сравнение данных о границе возникновения бафтинга скачка на профиле NASA 0012, полученных в [11] при помощи разных моделей турбулентности, показывает разброс в  $1^\circ$  в значениях угла атаки. Это означает, что существует невязкий трансзвуковой механизм, поддерживающий осцилляции скачка.

Рассмотрим нестационарное трансзвуковое течение вниз по потоку от скачка уплотнения. Течение со звуковой скоростью на бесконечности около полутела можно считать приемлемым приближением, которым и ограничимся. Стационарное решение этой задачи в случае полутел степенной формы  $y = Ax^k$  было дано в [12, 13] в форме автомодельного решения уравнения Кармана, которому удовлетворяет главный член разложения потенциала возмущений в ряд при скоростях частиц, близких к критической. Эти решения описывают обтекание полутел степенной формы при  $1/4 \leq k < 1$ . Решения, относящиеся к полутелам с  $0 \leq k < 1/4$ , были изучены в работе [14]. В них искомый потенциал представлялся в виде суммы двух членов, первый из которых соответствует возмущениям от конечного тела [15, 16], а второй

является членом более высокого порядка малости на больших расстояниях. Именно этот член дает возможность удовлетворить необходимым условиям на поверхности обтекаемого тела, причем величина добавочного потенциала оказывается отличной от нуля только в области за скачком уплотнения. В случае  $k = 0$  полученное решение описывает поле течения на больших расстояниях от тела конечной толщины. Интеграл расхода по любому контуру, охватывающему начало координат, постоянен на этом решении, поэтому оно соответствует полю потока на больших расстояниях от источника конечной интенсивности и его можно применять к описанию параметров течения с  $M_\infty = 1$  на большом расстоянии от конечного тела, имеющего сопротивление.

Здесь этот метод применяется к построению нестационарных полей течения около полутел степенной формы с  $0 \leq k < 1/4$ . Как и прежде, решение представляется в виде суммы двух членов, причем зависимость от времени определяется вторым членом, отличным от нуля только в области вниз по потоку от нестационарного скачка уплотнения.

**Стационарная задача.** Вне пограничного слоя вязкость отсутствует, а скачки уплотнения считаются настолько слабыми, что изменение энтропии пренебрежимо мало по сравнению с величинами, которые учитываются в рассматриваемом приближении. Поскольку набегающий звуковой поток является равномерным на бесконечности, то при указанных условиях он будет всюду безвихревым. Поэтому от системы уравнений Эйлера можно сразу перейти к одному уравнению для потенциала  $\phi$

$$(a^2 - v_x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2v_x v_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (a^2 - v_y^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2, \quad v_x = a_* + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — оси декартовой или цилиндрической системы координат,  $v_x$  и  $v_y$  — составляющие вектора скорости вдоль этих осей,  $a$  — скорость звука,  $\gamma = c_p/c_v$  — отношение удельных теплоемкостей, звездочкой отмечены параметры среды в критическом состоянии, когда скорость частиц равна скорости звука. Интеграл Бернулли (2) позволяет выразить скорость звука через производные потенциала по координатам.

Для исследования течений газа около полутел степенной формы  $y = Ax^k$  ( $x > 0$ ) рассмотрим для уравнения (1) задачу Коши с данными на оси симметрии  $y = 0$

$$\partial\phi/\partial y = 0 \text{ при } x < 0, \quad \partial\phi/\partial y = kAx^{k-1} \text{ при } x > 0. \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать обтекаемые тела выпуклыми, им соответствуют значения  $k$  из интервала  $0 \leq k < 1$ . Предельный случай  $k = 0$  рассмотрим особенно подробно. При скоростях частиц, близких к критической, искомый потенциал представим в виде

$$\phi = a_* \sum_i y^{\omega_i} f_i(\xi), \quad \xi = (\gamma + 1)^{-1/3} xy^{-n}, \quad n = (\omega_0 + 2)/3. \quad (4)$$

В [12, 13] решение сформулированной задачи Коши строилось приближенно, ограничиваясь первым членом разложения (4), содержащим только функцию  $f_0(\xi)$ . Она удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\left( \frac{df_0}{d\xi} - n^2 \xi^2 \right) \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + 5n(n-1)\xi \frac{df_0}{d\xi} - 3(n-1)(3n-2)f_0 = 0. \quad (5)$$

Связь между показателем степени  $\omega_0$  (или  $n$ ) и значением  $k$ , входящим в данные Коши (3), устанавливается при помощи разложения  $f_0(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . В итоге получается

$$\omega_0 = (1 + 2k)/(4 - k), \quad n = 3/(4 - k).$$

При  $\xi \rightarrow -\infty$  разложение  $f_0(\xi)$  выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось условие  $\partial\phi/\partial y = 0$  при  $y = 0$  и  $x < 0$ . Предельные линии в области течения не допускаются, а скачки уплотнения в рассматриваемом приближении имеют форму  $\xi = \xi_s = \text{const}$ . При переходе через фронт скачка составляющие скорости частиц удовлетворяют условиям Гюгонио, упрощенным применительно к трансзвуковым течениям газа. Из этих условий следуют соотношения между значениями функции  $f_0(\xi)$  и ее производных на фронте скачка уплотнения  $\xi = \xi_s$

$$f_{0,1} = f_{0,2}, \quad \frac{df_{0,1}}{d\xi} + \frac{df_{0,2}}{d\xi} = 2n^2 \xi_s^2, \quad (6)$$

в которых индекс 1 относится к значениям на стороне разрыва, обращенной к набегающему потоку, а индекс 2 – к противоположной стороне.

Наиболее полно результаты исследования рассматриваемой задачи изложены в работе [13]. Они утверждают, в частности, что решение существует только при  $1/4 < k < 1$ . В случае  $k = 1/4$  условию обтекания можно удовлетворить, если ввести в решение скачок уплотнения при  $\xi = \xi_s$ , причем величина  $\xi_s$  согласно (6) однозначно определяется значением постоянной  $A$  в данных Коши (3). Это типичный случай возникновения скачка уплотнения в сверхзвуковом течении, связанный с перерасширением потока. Решение задачи при  $k = 1/4$  оказывается возможным построить и со значением постоянной  $A = 0$ . В этом случае решение уравнения (5) дает главный член координатного разложения потенциала возмущений на больших расстояниях от тела конечных размеров [15]. Его параметрическое представление перед скачком уплотнения и за ним позволило определить также и координату  $\xi_s$  скачка [16]. При  $0 \leq k < 1/4$  решение задачи не существует.

**Источник в звуковом потоке.** Чтобы получить решение задачи Коши (3) при  $0 \leq k < 1/4$ , в разложении (4) нужно сохранить второй член  $y^{\omega_1} f_1(\xi)$ . Что касается функции  $f_0(\xi)$ , то будем считать ее соответствующей задаче обтекания тела конечных размеров с параметрами  $\omega_0 = 2/5$  и  $n = 4/5$ . Подстановка (4) в исходное уравнение (1) для потенциала скорости приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{df_0}{d\xi} - \frac{16}{25} \xi^2 \right) \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \left[ \frac{4}{5} (2\omega_1 - \frac{9}{5}) \xi + \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} \right] \frac{df_1}{d\xi} - \omega_1 (\omega_1 - 1) f_1 = 0, \quad (7)$$

которому удовлетворяет функция  $f_1(\xi)$ . Уравнение (7) однородно, однако оно имеет особые точки при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , где коэффициент при второй производной  $d^2 f_1/d\xi^2$  обращается в бесконечность, и на предельной характеристике  $\xi = \xi_i$ , определяемой равенством  $df_0/d\xi = (16/25)\xi^2$ , где этот коэффициент обращается в нуль. Производная  $\partial\phi/\partial y$ , вычисленная по первому члену представления (4), равна нулю на полуоси  $y = 0$ ,  $x > 0$ . Поэтому показатель степени  $k$  в данных Коши (3) при  $0 \leq k < 1/4$  связан не с величиной  $\omega_0$ , а с параметром  $\omega_1$ . Эта связь устанавливается при помощи разложения функции  $f_1(\xi)$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . В результате

имеем

$$\omega_1 = (1 + 4k)/5. \quad (8)$$

Отсюда следует, что величина  $\omega_1$  изменяется в пределах  $1/5 < \omega_1 < 2/5$ , что оправдывает отбрасывание правой части при выводе уравнения (7).

Искомое решение должно давать  $v_y = 0$  вдоль полуоси  $y = 0$ ,  $x < 0$  и быть аналитическим в особой точке  $\xi = \xi_1$ , которой соответствует предельная характеристика. Удовлетворяющие этим требованиям решения уравнения (7) существуют только при некотором наборе значений  $\omega_1$  [17]. Спектр начинается с  $\omega_1 = 0$ . Эта величина не входит в указанный выше интервал изменения  $\omega_1$ , поэтому искомая функция  $f_1(\xi)$  может быть отличной от нуля лишь в области, расположенной вниз по течению от фронта скачка уплотнения.

В соответствии с представлением (4) будем считать, что форма пересекающего поток скачка уплотнения задана соотношением

$$\xi = \xi_s \left( 1 + \sum_{i=1} C_i y^{\sigma_i} \right), \quad \sigma_1 = \omega_1 - 2/5. \quad (9)$$

Условия ударного сжатия, упрощенные для трансзвукового диапазона скоростей, были обсуждены выше. Из них следуют данные Коши для уравнения (7) при  $\xi = \xi_s$ :

$$f_{1,2} = 2C_1 \xi_s \left( \frac{16}{25} \xi_s^2 - \frac{df_{0,2}}{d\xi} \right), \quad \frac{df_{1,2}}{d\xi} = \frac{4}{5} C_1 \xi_s^2 (2\omega_1 - \frac{1}{5}). \quad (10)$$

Поскольку уравнение (7) линейно, постоянная  $C_1$  линейно зависит от величины  $A$ , входящей в уравнение образующей обтекаемого тела.

Параметрическое представление функции  $f_0(\xi)$  позволяет преобразовать уравнение (7) к виду гипергеометрического уравнения Гаусса и записать решение рассматриваемой задачи в виде гипергеометрических рядов [14]. В случае  $k = 0$ ,  $\omega_1 = 1/5$ , что соответствует телу конечной толщины, решение получается в виде квадратуры

$$f_1(\xi) = B_2 \exp \left( 4 \int_{\xi_s}^{\xi} \frac{\xi d\xi}{16\xi^2 - 25df_0/d\xi} \right), \quad (11)$$

а  $B_2$  равно правой части первого из равенств (10). Оно отвечает возмущениям, которые вносит плоский источник конечной интенсивности в поток со звуковой скоростью на бесконечности. Действительно, расход газа через две параллельные оси  $x$  прямые, проведенные на расстоянии  $y$  от этой оси, вычисленный при помощи первого члена представления потенциала, на больших расстояниях приводит к нулевой величине. В то же время двучленное представление потенциала приводит к отличному от нуля значению расхода, которое не зависит от расстояния  $y$ . Оно также описывает дальнее поле скоростей около тела конечных размеров с ненулевым сопротивлением.

**Нестационарное течение.** Рассмотрим далее класс течений, в которых зависимость от времени  $t$  проявляется, начиная со второго члена разложения потенциала на больших расстояниях по формуле (4), так что  $f_1$  является теперь функцией не одной, а двух переменных:

$$\xi = (\gamma + 1)^{-1/3} xy^{-n}, \quad \tau = (\gamma + 1)^{1/3} a_* ty^{-m}. \quad (12)$$

Подставим это представление в уравнение для потенциала нестационарных течений и получим уравнение для  $f_1(\xi, \tau)$ :

$$\left( \frac{df_0}{d\xi} - n^2 \xi^2 \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} - m^2 \tau^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} + \left[ n(2\omega_1 - 1 - n)\xi + \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} \right] \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + 2(1 - nm\xi\tau) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi \partial \tau} + m(2\omega_1 - 1 - m)\tau \frac{\partial f_1}{\partial \tau} - \omega_1(\omega_1 - 1)f_1 = 0. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае  $n = 4/5$  и  $m = 6/5$ . Однородное линейное уравнение с частными производными (13) имеет смешанный эллиптико-гиперболический тип, который определяется знаком выражения

$$D = 1 - 2mn\xi\tau + m^2\tau^2 \frac{df_0}{d\xi}. \quad (14)$$

При  $D > 0$  это уравнение гиперболического типа, а при  $D < 0$  — эллиптического. Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — корни квадратного трехчлена (14). При  $\xi \geq \xi_s$  имеет место неравенство  $n^2\xi^2 > df_0/d\xi > 0$ , так что оба корня  $\tau_1$  и  $\tau_2$  положительны и  $D > 0$  при  $0 \leq \tau < \tau_1$  и  $\tau > \tau_2$ . В области  $\tau > \tau_2$ ,  $\xi \geq \xi_s$  обе характеристики имеют

положительный наклон, поэтому на линиях  $y = \text{const}$  возмущения передаются вниз по потоку, и положение скачка уплотнения в этой области формирует течение за ним. Во второй области гиперболичности  $0 \leq \tau < \tau_1$ ,  $\xi \geq \xi_s$  наклон характеристик отрицателен, поэтому возмущения передаются вверх по потоку, и движение скачка уплотнения определяется решением задачи течения газа. Отрезок прямой  $\xi = \xi_s$ ,  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  является частью границы эллиптической области. Два других участка границы совпадают с линиями параболичности  $\tau = \tau_1(\xi)$  и  $\tau = \tau_2(\xi)$ , простирающимися в бесконечность. Форма ударной волны, как и прежде, задается равенством (9), в котором  $C_i$  уже не постоянные, а зависят от времени  $t$ . Из условий ударного сжатия, упрощенных для трансзвукового диапазона скоростей, следуют граничные значения  $f_1(\xi, \tau)$  и  $\partial f_1 / \partial \xi$  при  $\xi = \xi_s$ .

Дальнейший анализ решений уравнения (13) проведем в двух предельных случаях, когда  $\tau \ll 1$  и  $\tau \gg 1$ . Согласно (12) первый случай соответствует большим значениям  $y$ . При  $\tau \ll 1$  пренебрегаем членами уравнения (13), в которых коэффициенты пропорциональны  $\tau^2$  и  $\tau$ . В более простом уравнении, получающемся после отбрасывания этих членов, делаем замену искомой функции

$$f_1(\xi, \tau) = h(\xi)g(\xi, \tau). \quad (15)$$

Здесь  $h(\xi)$  – решение задачи Коши (10) для уравнения (7), в котором вместо  $f_1(\xi)$  подставлено  $h(\xi)$ . При  $k = 0$  уравнение для  $g(\xi, \tau)$  трансформируется в уравнение переноса, решение которого записывается в виде

$$g(\xi, \tau) = G(\tau + \zeta), \quad \zeta = 2 \int_{\xi_s}^{\xi} \frac{d\xi}{n^2 \xi^2 - df_0/d\xi}.$$

Дальнейшее применение граничных условий на скачке уплотнения позволяет выразить функцию  $G$  через  $C_1(\tau)$ , входящую в данные на скачке уплотнения. Наконец, подстановка полученных формул в (15) дает решение рассматриваемой задачи в случае  $k = 0$

$$f_1(\xi, \tau) = 2\xi_s \left( n^2 \xi_s^2 - \frac{df_{0,2}}{d\xi} \right) \frac{h(\xi)}{h(\xi_s)} C_1(\tau + \zeta). \quad (16)$$

На линии  $y = \text{const}$  решение (16) описывает распространяющуюся вверх по потоку бегущую волну. Скорость волны при этом



убывает, а ее амплитуда увеличивается. Форма волны определяет вызываемое ею движение скачка уплотнения.

Случай  $\tau \gg 1$  соответствует малым значениям координаты  $y$ . При  $\tau \gg 1$  можно пренебречь 1 по сравнению с  $mt\xi\tau$  в коэффициенте при смешанной производной  $\partial^2 f_1 / \partial \xi \partial \tau$  в уравнении (13). Если теперь перейти к исходным переменным  $x$ ,  $y$  и  $t$ , то получим уравнение стационарных возмущений звукового потока около профиля, для которых допускается зависимость от времени  $t$ , как от параметра. Это полностью совпадает с постановкой задачи в квазистационарной теории. Поэтому рассматриваемому приближению  $\tau \gg 1$  в автомодельных переменных соответствует задача Коши (10) для однородного уравнения (7), в которой, однако,  $C_1$  является функцией  $t$ . Эта задача предыдущего раздела подробно изучена в работе [14]. В силу однородности (7) зависимость решения от времени полностью определяется множителем  $C_1(t)$ . Полученное решение описывает распространение возмущений вниз по потоку с бесконечной скоростью.

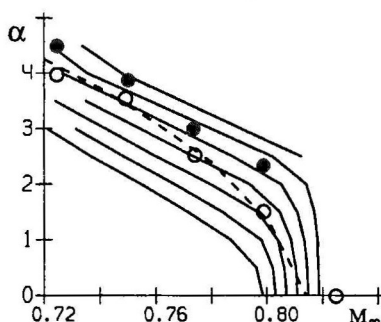


Рис. 1. Линии  $c_d = \text{const}$  и граница бафтинга для профиля NACA 0012

**Граница области устойчивости.** Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем генерирует сильные возмущения толщины вытеснения, которые воспринимается внешним невязким потоком как изменение граничных условий на профиле и в следе. Однако крупномасштабное движение скачка подразумевает передачу возмущений на скачок через невязкую область. Уравнение (16) дает механизм такой передачи. При приближении к скачку амплитуда возмущений возрастает как функция  $h(\xi)$ , связываемая с сопротивлением профиля в усредненном стационарном

потоке. Этот механизм поддержки колебаний скачка определяется структурой поля трансзвукового течения около профиля. В рассматриваемом приближении он может привести к неустойчивости стационарного течения, когда коэффициент сопротивления  $c_d$  превзойдет некоторое значение  $R$ , определяемое формой профиля, углом атаки  $\alpha$  и  $M_\infty$ . В задаче обтекания профиля изменения  $\alpha$  и  $M_\infty$  невелики, поэтому оценка границы области устойчивости в виде кривой  $c_d = \text{const}$  может быть достаточно точной.

Данные на рис. 1 подтверждают это в случае трансзвукового обтекания профиля NASA 0012. Здесь линии  $c_d = \text{const}$  изображены сплошными линиями. Они получены из расчетов стационарных вязких течений около профиля при числе Рейнольдса  $Re = 10^7$  при помощи программы [18]. Штриховая линия представляет границу бафтинга, полученную в экспериментах [5], а маркеры  $\circ$  и  $\bullet$  показывают точки на этой границе, вычисленные при помощи моделей взаимодействующего пограничного слоя в работах [9] и [19] соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00974).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Holder D.W. *The transonic flow past two-dimensional aerofoils* // J. Royal Aeron. Soc. – 1964. – V. 68. – P. 501–516.
2. Mabey D.G. *Physical phenomena associated with unsteady transonic flow*. In D. Nixon, editor, *Unsteady Transonic Aerodynamics*. – 1989. – V. 120, AIAA Progress in Aeronautics and Astronautics.
3. McDevitt J.B., Levy L.L.Jr., Deivert G.S. *Transonic flow about a thick circular-arc airfoil* // AIAA J. – 1976. – V. 14. – No 5. – P. 606–613.
4. Mabey D.G., Welsh B.L., Cripps B.E. *Periodic flow on a rigid 14% thick biconvex wing at transonic speeds* // RAE-TR-81059. – 1981.
5. McDevitt J.B., Okuno A.F. *Static and dynamic pressure measurements on a NACA 0012 airfoil in the Ames high Reynolds number facility* // NASA TP-2485. – 1985.
6. Gillan M.A. *Navier-Stokes simulation of self-excited shock induced oscillations* // AIAA Paper. – 1995. – No 95-1809.
7. Rumsey C.L., Sanetrick M.D., Biedron R.T., Melson N.D., Parlette E.B. *Efficiency and accuracy of time-accurate turbulent Na-*

*vier-Stokes computations* // AIAA Paper. – 1995. – No 95-1835.

8. Bartels R.E., Rothmayer A.P. *An IBL approach to multiscaled shock induced oscillation* // AIAA Paper. – 1995. – No 95-2157.

9. Edwards J.W. *Transonic shock oscillations calculated with a new interactive boundary layer coupling method* // AIAA Paper. – 1993. – No 93-0777.

10. Bartels R.E. *Interactive boundary layer computations using the improved  $k-\omega$  turbulence model*. In C. Taylor and P. Durbetaki, editors, *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*. – 1995. – V. 9. – Part 1. – P. 561-538, Pineridge Press.

11. Bartels R.E. *Flow and turbulence modeling and computation of shock buffet onset for conventional and supercritical airfoils* // NASA TP 1998-206908. – 1998.

12. Guderley K.G. *Theorie Schallnaher Strömungen*. – Berlin: Springer-Verlag, 1957.

13. Germain P. *Écoulements transsoniques homogènes* // Progress in Aeronaut. Sci. – 1964. – V. 4. – P. 143-273.

14. Лифшиц Ю.Б., Рыжов О.С. *Об обтекании полутел звуковым потоком идеального газа* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – N 2. – С. 387-396.

15. Франкль Ф.И. *Исследования по теории крыла бесконечно-го размата, движущегося со скоростью звука* // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 57. – N 7. – С. 661-664.

16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. – М.: Наука, 1986.

17. Euvrard D. *Nouveaux resultats concernant le developpement asymptotique du potentiel des vitesses à grande distance d'un profil plan transsonique* // C. R. Acad. Sci. – 1965. – V. 260. – No 7. – P. 1851-1854.

18. Velichko S.A., Lifshitz Yu.B. *Numerical simulation of viscous transonic flows over an airfoil* // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. – 1995. – V. 7. – P. 189-206.

19. LeBalleur J.C. Girodroux-Lavigne P. *A viscous-inviscid iteration method for computing unsteady transonic separation* // ONERA TP. – 1985. – No 1985-5.